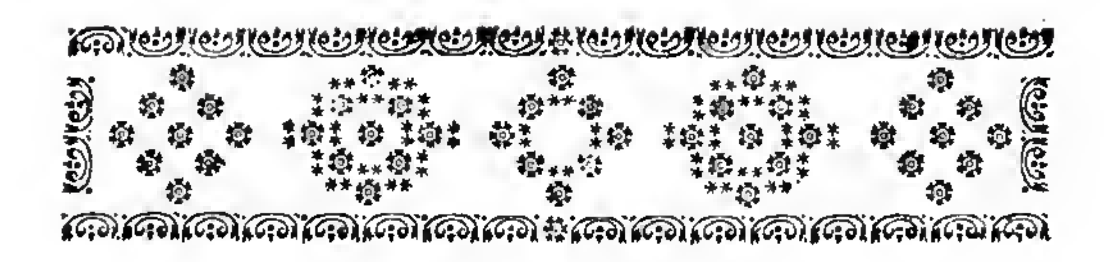


RECHERCHES
SUR LES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS QUI SE TROUVENT DANS LES ACTIONS DES FORCES,

PAR M. EULER.

I.

C'Eſt une verité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui ſont produites par les forces de la nature, renferment conſtamment un *maximum*, ou un *minimum*. C'eſt à dire, les forces étant données, l'effet qu'elles produiſent, ſera toujours tel, qu'une certaine quantité y devient un *maximum*, ou un *minimum*, de ſorte que cette prérogative n'auroit plus lieu, ſi l'effet avoit été tout autre. Cette conſidération nous conduit à reconnoitre un principe général de la nature, ſur lequel toutes ſes actions ſe réglent ; & qui nous fait voir, que la nature ſe propoſe toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenſes. On ſera tout à fait convaincu de la verité de ce principe général, par les excellentes réfléxions, que Monſieur de *Maupertuis*, notre illuſtre Préſident, a publiées ſur ce ſujet, tant dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris, que dans nos Mémoires pour l'Année 1746, où il a demontré que dans le choc des Corps le mouvement ſe diſtribuë de maniere que la quantité d'action, que ſuppoſe un changement arrivé, eſt la

plus petite qu'il ſoit posſible. De plus il a fait voir, que dans le repos les Corps, qui ſe tiennent en équilibre, doivent être tellement ſitués, que s'il leur arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action ſeroit la moindre.

II. C'eſt donc ce principe de *la moindre quantité d'action*, auquel Mr. de *Maupertuis* réduit tous les *maxima*, ou *minima*, que la Nature obſerve dans toutes ſes productions: & la quantité d'action pourra toujours être répréſentée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendroit, s'il étoit arrivé tout autre effet. Ce principe aura donc également lieu dans la Mecanique & dans la Statique, c. à d. dans le mouvement, auſſi bien que dans tous les états d'équilibre, où les corps ſe peuvent trouver. Pour le mouvement, Mr. de *Maupertuis* vient de faire voir que ce principe de la *moindre quantité d'action* s'obſerve à la rigueur dans le choc des corps, tant élaſtiques que non élaſtiques: & moi, j'ai découvert une ſemblable loi dans le mouvement des corps, qui ſont attirés vers un, ou pluſieurs centres de forces, par des forces quelconques; ayant remarqué que le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette proprieté, que nommant u ſa viteſſe dans un endroit quelconque, & ds l'elément de l'eſpace, cette formule $\int u\,ds$ ſera toujours un *minimum*. Ce ſera donc dans ce cas cette formule $\int u\,ds$, qui exprime ce que Mr. de *Maupertuis* nomme la quantité d'action. Ces deux cas du mouvement, dans leſquels nous voyons, que ce principe a lieu, ſont d'une ſi grande etenduë, qu'on y peut presque réduire tous les mouvemens, qui arrivent au monde; & partant on n'aura plus la moindre raiſon de douter, que dans tous les mouvemens, par quelques forces qu'ils ſoient produits, il n'y ait toujours une certaine formule, dont la valeur ſoit la plus petite, & par laquelle ſera reoreſentée la quantité d'action.

III. L'uſage de ce principe eſt déjà depuis long tems reconnu dans la Statique, ou Dynamique, où il s'agit de l'équilibre des corps ſollicités par des forces quelconques, & c'eſt par ſon moyen, qu'on a donné des ſolutions de pluſieurs problemes de cette nature. Il a été aiſé

aiſé de prévoir, qu'une chaine ſuſpenduë de ſes deux bouts devoit prendre une telle figure, afin que ſon centre de gravité ſoit le plus bas: ou que la diſtance de ce centre au centre de la terre, ou bien à un plan horizontal, ſoit *un minimum*. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaine $= ds$, & ſa diſtance à un plan horizontal fixe pris à volonté $= x$, ce ſera la valeur de cette formule $\int x\,ds$, qui ſera un *minimum* pour la courbe de la chaine: & partant ce ſera la même formule $\int x\,ds$, qui répréſente la quantité d'action, qui doit être la plus petite. De même un ligue rempli d'un fluide prendra la figure, dont la capacité eſt la plus grande, afin que le fluide puiſſe deſcendre le plus bas qu'il eſt poſſible: & Mr. de *Maupertuis* a fait voir l'uſage de ce grand principe en pluſieurs autres figures, que ces corps ſollicités par des forces quelconques ſont obligés de recevoir; où il a determiné la formule, qui répreſente en chaque cas la quantité d'action, qui y doit être un *minimum*. Mr. *Daniel Bernoulli* a auſſi remarqué, que la courbe d'une lame elaſtique renferme un tel *minimum*; car nommant un élément quelconque de cette courbe $= ds$, & le rayon de ſa développée dans cet endroit $= r$, il a obſervé que la valeur de cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ devient un *minimum* dans la courbe élaſtique; & c'eſt de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité ſur la methode *de Maximis & Minimis*, pour faire voir, que ce principe fournit la même courbe, qu'on a trouvée par la methode directe, dont on ſe ſert ordinairement.

IV. Par là on voit qu'il doit y avoir une double methode de reſoudre les problemes de Mecanique; l'une eſt la methode directe, qui eſt fondée ſur les loix de l'équilibre, ou du mouvement; mais l'autre eſt celle dont je viens de parler, où ſachant la formule, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*, la ſolution ſe fait par le moyen de la methode *de Maximis & minimis*. La premiere fournit la ſolution en déterminant l'effet par les cauſes efficientes; or l'autre a en vuë les cauſes finales, & en deduit l'effet: l'une & l'autre doit conduire à la même ſolution, & c'eſt cette harmonie, qui nous convainc

de

de la verité de la ſolution, quoique chaque methode doive être fondée ſur des principes indubitables. Mais il eſt ſouvent trés difficile de découvrir la formule, qui doit être un *maximum,* ou *minimum,* & par laquelle la quantité d'action eſt repréſentée. C'eſt une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathematique, qu'à la Métaphyſique puisqu'il s'agit de connoitre le but, que la nature ſe propoſe dans ſes opérations : & ce ſeroit porter cette ſcience à ſon plus haut degré de perfection, ſi l'on étoit en état d'asſigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y eſt la plus petite, & qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoiſſance. Mais je crois que nous ſommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, & qu'il ſera presque impoſſible d'y arriver, à moins que nous ne découvrions pour un grand nombre de cas differens les formules, qui y deviennent, ou des *maxima,* ou *minima.* Or ſachant les ſolutions, que la methode directe nous fournit, il ne ſera pas difficile de deviner des formules, qui étant ſuppoſées des *maxima,* ou *minima,* conduiſent aux mêmes ſolutions. Par ce moyen nous connoîtrons *a poſteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, & alors il ne ſera plus ſi difficile d'en demontrer la verité par les principes connus de la Métaphyſique.

V. C'eſt dans cette vuë, que je me propoſe de développer quelques problêmes de Statique, qui roulent ſur la courbe, qu'un fil parfaitement flexible doit former, étant ſollicité par des forces quelconques. Je chercherai prémierement la ſolution de ces problêmes par la methode directe, c. à. d. par les loix connuës de l'équilibre ; enſuite je tacherai de découvrir les formules, qui dans ces courbes trouvées obtiennent, ou la plus grande, ou la plus petite valeur, & lesquelles par conſéquent pourront être regardées comme les expresſions de la quantité d'action, dont la valeur ſera plus petite pour l courbe, qu'on aura trouvée par l'autre methode, qu'elle ſeroit, ſi le fil avoit pris tout autre courbure. J'ai choiſi cette eſpece de problêmes, puisqu'on ſait déjà, que dans le cas où le fil n'eſt ſollicité que par la gravité, c'eſt la diſtance du centre de gravité du fil au centre de la terre, qui eſt un *minimum.* Or je rendrai ce problême plus

general,

général, en supposant que toutes les particules du fil soient sollicitées par des forces quelconques, qui soient dirigées, ou vers un point fixe, ou vers plusieurs, étant proportionelles à des fonctions quelconques de ces distances: de plus on pourra supposer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des *voiles*, & d'autres semblables, où la direction des forces est toujours perpendiculaire à la courbe même: & dans ces cas j'ai remarqué qu'il est beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y est un *maximum*, ou *minimum*; & partant cette considération contribuëra d'autant plus à la connoissance des choses, que la nature dans ses opérations tache de ménager le plus qu'il est possible.

PROBLEME GÉNÉRAL.

VI. *Le fil perfaitement flexible* AYM *étant sollicité dans chacun de ses élémens par des forces quelconques, trouver la courbe* AYM, *à laquelle ce fil sera réduit.* Fig. 1.

SOLUTION.

Rapportons la courbe AYM, qu'il faut chercher à l'axe CP, & nommons une abscisse quelconque CP $= x$, l'appliquée PM $= y$, & la longitude du fil, qui y répond AYM $= s$, de sorte que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, puisque l'appliquée PM est supposée perpendiculaire à l'abscisse CP. Maintenant de quelque force que l'élément Mm $= ds$ soit sollicité, elle pourra être réduite à deux forces, dont l'une tirera selon la direction MQ parallele à l'abscisse CP, l'autre selon la direction de l'appliquée MP. Soit donc la force MQ $= Q ds$, & la force MP $= P ds$, puisque chacune n'agissant, que sur l'élément du fil Mm $= ds$ sera infiniment petite. Afin que le fil demeure en équilibre, puisqu'il est parfaitement fléxible, il faut que les momens de toutes les forces, dont la partie anterieure du fil AYM est sollicitée, par rapport au point M, se détruisent mutuellement. Pour cet effet considerons une portion quelconque du fil AY, que nous regarderons comme variable, pendant que le point M demeure fixe, & partant

partant les quantités x & y conſtantes ; ſuppoſition qui ne durera, que jusqu'à ce que nous aurons trouvé la ſomme de tous les momens des forces par rapport au point M. Soit donc notre nouvelle abſciſſe variable $CX = \varphi$, l'appliquée $XY = \psi$, & la courbe $AY = \omega$, de-ſorte que $d\omega = \sqrt{(d\varphi^2 + d\psi^2)}$; & ſoit des forces, dont l'élément $Yy = d\omega$ eſt ſollicité, celle qui agit ſelon YZ parallele à $CX = q\,d\omega$, & l'autre qui agit ſelon $YX = p\,d\omega$. Or le moment de celle-là YZ par rapport au point M ſera $= q\,d\omega\,(PM - YX) = (y - \psi)\,q\,d\omega$, qui tendra à tourner le fil autour du point M, en ſorte que l'angle A M Q ſoit diminué : & le moment de l'autre force $YX = p\,d\omega$ ſera $= p\,d\omega\,(CP - CX) = (x - \varphi)\,p\,d\omega$, dont l'effet ſera contraire au précedent, & tendra à augmenter l'angle AMQ. Par conſéquent le moment de ces deux forces priſes enſemble ſera $= (y - \psi)\,q\,d\omega - (x - \varphi)\,p\,d\omega$, qui ſera employé à tourner le fil autour de M dans le ſens AQ. Donc le moment de toutes les forces qui agiſſent ſur la portion du fil AY, ſera l'integrale de cette expreſſion, & puisque x & y ſont conſiderés comme conſtantes, ce moment qui reſulte de la portion AY ſera $= y\int q\,d\omega - \int \psi\,q\,d\omega - x\int p\,d\omega + \int \varphi\,p\,d\omega$. Approchons maintenant le point Y jusqu'au point M pour avoir le moment, qui réſulte de toutes les forces dont le fil AYM eſt ſollicité, & alors les quantités φ, ψ, q, p & $d\omega$ deviendront égales à x, y, Q, P & ds de ſorte que la ſomme de tous les momens des forces qui agiſſent ſur le fil AYM, pour le tourner autour de M dans le ſens AQ ſera $= y\int Q\,ds - \int y\,Q\,ds, - x\int P\,ds + \int x\,P\,ds$. Or afin que le fil étant parfaitement flexible, ne ſoit pas remué, il faut que la ſomme de ces momens évanouïſſe, d'où nous obtiendrons cette équation, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$y\int Q\,ds - \int y\,Q\,ds - x\int P\,ds + \int x\,P\,ds = 0.$$

Cette équation deviendra plus ſimple, en prenant ſa differentielle qui ſera :

$$dy\int Q\,ds - dx\int P\,ds = 0.$$

où $\int Q\,ds$ exprime la ſomme de toutes les forces, dont le fil AM eſt ſollicité ſuivant la direction de l'abſciſſe PC, & $\int P\,ds$ la ſomme de toutes

toutes les forces, dont le fil AM eſt ſollicité ſuivant la direction des appliquées PM. C. Q. F. T.

VII. Si le fil eſt arrêté au point A, ou tenu fixe par une force quelconque, on réſoudra auſſi celle-cy ſuivant les directions AB & AC. Soit la force $AB = B$, & la force $AC = C$; & celle-là doit être compriſe dans $\int Q\,ds$, & celle-cy dans $\int P\,ds$. Donc, ſi ces expreſſions $\int Q\,ds$ & $\int P\,ds$, ne comprennent que les forces, qui agiſſent ſur les élémens du fil, on y doit ajouter ces forces finies B & C, & au lieu de $\int Q\,ds$ nous aurons $B + \int Q\,ds$, & $C + \int P\,ds$ au lieu de $\int P\,ds$; ce qui donnera pour la courbe cette équation differentielle:

$$dy\,(B + \int Q\,ds) - dx\,(C + \int P\,ds) = o.$$

dont l'integrale ſera exprimée par:

$$\int dy\,(B + \int Q\,ds) - \int dx\,(C + \int P\,ds) = \text{Conſt.}$$

Or puiſque $\int dy\,(B + \int Q\,ds)$ exprime la ſomme des momens, qui réſultent des forces ſelon la direction des abſciſſes, & $\int dx\,(C + \int P\,ds)$ la ſomme des momens, qui réſultent des forces ſelon la direction des appliquées, comme ces momens ſe doivent détruire mutuellement, il eſt évident que la conſtante doit être $= o$, pourvuque les integrales s'étendent par tout le fil.

VIII. Cependant, puiſque les integrales $\int Q\,ds$ & $\int P\,ds$ peuvent déjà renfermer les conſtantes B & C, on les pourra omettre ſans faute, de ſorte que la nature de la courbe du fil ſera exprimée, ou par cette équation integrale $\int dy \int Q\,ds - \int dx \int P\,ds = \text{Conſt.}$ ou par cette équation differentielle $dy \int Q\,ds - dx \int P\,ds = o$. Laquelle nous fournit cette analogie:

$$dy : dx = \int P\,ds : \int Q\,ds.$$

D'où nous tirons cette régle générale pour trouver la courbure d'un fil parfaitement fléxible, étant ſollicité par des forces quelconques. C'eſt qu'ayant tiré l'appliquée infiniment proche pm, & Mn parallele à l'abſciſſe, il y aura toujours: *le differentiel de l'appliquée mn au differentiel de l'abſciſſe $Mn = Pp$, comme la ſomme de toutes les forces, qui agiſſent dans la direction des appliquées, eſt à la ſomme de toutes les forces, qui agiſſent dans la direction des abſciſſes.*

 IX. Si

IX. Si le fil A Y M n'eſt pas parfaitement fléxible, mais qu'il ſoit élaſtique, ou qu'il ait quelque roideur qui réſiſte à l'infléxion, il ne ſera pas difficile auſſi dans ce cas de déterminer la courbe, que ce fil prendra, quoiqu'il ſoit outre cela ſollicité par des forces quelconques, comme je viens de ſuppoſer. Car la force, ou plutot le moment, qui eſt requis pour courber le fil au point M, ſera proportionnel à la courbure dans ce point, ou réciproquement comme le rayon de la développée au point M. Suppoſant donc ce rayon $= r$, de ſorte que $r = \frac{ds^3}{dx\, ddy}$, en ſuppoſant dx conſtant, ou $r = \frac{ds\, dx}{ddy}$ en ſuppoſant ds conſtant, la force de roideur ſera comme $\frac{1}{r}$, ſi la roideur eſt partout égale. Or ſi l'épaiſſeur du fil eſt ſuppoſée variable, la force de roideur pourra être exprimée par $\frac{S}{r}$, ou S eſt une fonction proportionnelle à l'épaiſſeur du fil au point M. Cette force de roideur tendant à remettre le fil dans ſa ſituation droite, que je ſuppoſe lui être naturelle, elle doit être contrebalancée par la ſomme des momens de toutes les forces dont le fil eſt ſollicité. Or la ſomme de ces momens a été trouvée $= y\int Q ds - \int y Q ds - x\int P ds + \int x P ds$ ou bien $= \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$, dont la direction étant contraire à la force de roideur $\frac{S}{r}$, il faut que ces deux expreſſions ſoyent égales entr'elles. De là nous obtiendrons pour la courbe de ce fil roide, ou élaſtique, cette équation :

$$\frac{S}{r} = \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$$

qui ſe réduit à celle, que nous avons trouvée dans la ſolution du probleme, ſi la roideur S évanouït.

X. En voicy donc la ſolution du problême le plus général, par laquelle on eſt en état de déterminer la courbe, que forme un fil, ou parfaitement fléxible, ou élaſtique, dont tous les points ſont ſolli-

cités par des forces quelconques. Mais je remarque d'abord, que cette solution générale ne se peut déduire par la methode *de maximis & minimis:* car quoique cette methode soit propre à fournir des solutions générales, il faut pourtant qu'on sache, desquelles des variables soyent composées les fonctions, qui entrent dans la formule qui doit être, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Donc, à moins qu'on ne détermine la nature des fonctions P & Q, qui expriment les forces, dont chaque élément M*m* du fil est sollicité, il est imposible de découvrir une formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, produise la même courbe. Je m'en vais donc appliquer cette solution générale à des cas particuliers, en déterminant les fonctions P & Q, ou par les abscisses *x*, ou par les appliquées *y*, ou par une expression, qui contienne toutes les deux d'une maniere, dont la composition soit connuë. Pour cet effet je ferai l'application de la solution générale trouvée aux problemes suivants: & je tacherai de joindre à la solution de chacun la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, conduise à la même courbe: afin qu'on en puisse connoitre pour chaque cas l'expression, qui répréſente la quantité d'action.

PROBLEME I.

XI. *Le fil parfaitement flexible* AYM *étant dans chaque point* M *sollicité selon la direction des appliquées* MP *par des forces, qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces appliquées: trouver la courbe* AYM *que ce fil formera.*

SOLUTION.

Ayant nommé comme auparavant l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de l'appliquée y, à laquelle la force dont le fil au point M est tiré suivant la direction MP, est supposée proportionnelle, de sorte que la force qui agit sur l'elément $Mm = ds$ soit $= Y\,ds$, laquelle ayant été supposée dans la solution générale $= P\,ds$, nous aurons $P = Y$ & $Q = o$. Et partant puisque le fil est supposé parfaitement fléxible, la nature de la

 courbe

courbe ſera exprimée par cette équation, $B\,dy - dx\int Y\,ds = 0$. Car quoique $Q = 0$, l'integral $\int Q\,ds$ n'evanouïra pas, mais il ſera égale à une conſtante B, qui exprime la force A B appliquée au bout du fil A: or l'autre ſorce A C = C ſera renfermée dans l'expreſſion integrale $\int Y\,ds$. Pour reduire cette équation, & pour la ramener à la forme, qui ſe trouve dans la methode de *maximis* & *minimis*, je ſuppoſe $dy = p\,dx$, pour avoir $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & l'equation trouvée ſe changera en cette forme $Bp = \int Y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, dont le differentiel eſt $B\,dp = Y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, ou $B\,p\,dp = Y\,dy\sqrt{(1+pp)}$ à cauſe de $dx = \frac{dy}{p}$, d'où nous tirons $\frac{B\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = Y\,dy$, & prenant les integrales $\int Y\,dy = B\sqrt{(1+pp)}$, la conſtante qu'on pourroit ajouter, étant compriſe dans l'integrale $\int Y\,dy$: & cette équation $\int Y\,dy = B\sqrt{(1+pp)}$ ayant ſes deux variables p & y ſeparées, peut ſuffire pour la conſtruction de la courbe, que nous cherchons.

XII. Pour trouver cette même courbe par la methode de *Maximis* & *Minimis*, il faut ſe rappeller cette ſolution générale, que j'ai donnée dans mon traité ſur cette matiere. Ayant poſé l'abſciſſe $= x$, l'appliquée $= y$, & pour les differentiels $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$ &c. Soit $\int Z\,dx$ la formule, dont la valeur doit être un *maximum*, ou *minimum*, où Z marque une fonction quelconque des quantités x, y, p, q, r, &c. de ſorte que ſon differentiel ait une telle forme:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ \&c.}$$

alors j'ai démontré, que la courbe, où $\int Z\,dx$ eſt un *maximum*, ou *minimum*, ſera exprimée par cette équation, ſuppoſant l'element dx conſtant.

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{\&c.}$$

XIII. Comme cette équation eſt encore trop generale pour notre cas, ſoit Z ſeulement une fonction de y & p, de ſorte que $dZ = N\,dy + P\,dp$, & la formule $\int Z\,dx$ ſera un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe exprimée par cette équation: $0 = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N\,dx =$

dP,

dP, qui etant multipliée par p, à cause de $pdx = dy$, donne $Ndy = pdP$. Or nous avons $dZ = Ndy + Pdp$, & partant il y aura $dZ = pdP + Pdp$, dont l'integrale est : $Z = Pp +$ Const. Nous voilà donc réduits à trouver une telle fonction Z de y & de p, que supposant $dZ = Ndy + Pdp$, l'équation $Z = Pp +$ Const. devienne la même, que nous avons trouvée, savoir $\int Ydy = B\sqrt{(1+pp)}$, ou comme B sera égale à la constante de la premiere équation, que $Z - Pp$ devienne $= \frac{\int Ydy}{\sqrt{(1+pp)}}$, ou $\int Ydy = (Z - Pp)\sqrt{(1+pp)}$.

XIV. Pour resoudre cette équation, ou pour en tirer la valeur de Z, puisque $P = \frac{Z}{p} - \frac{\int Ydy}{p\sqrt{(1+pp)}}$, je remets cette valeur dans l'equation $dZ = Ndy + Pdp$, & j'aurai $dZ = Ndy + \frac{Zdp}{p} - \frac{dp\int Ydy}{p\sqrt{(1+pp)}}$, ou bien $\frac{pdZ - Zdp}{pp} = \frac{Ndy}{p} - \frac{dp\int Ydy}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, où le premier membre étant integrable, ayant pour integrale $\frac{Z}{p}$, il faut que le second membre soit aussi integrable. Or son integrale tirée de la partie $\frac{-dp\int Ydy}{pp\sqrt{(1+pp)}}$ en supposant y constant est $= \frac{\int Ydy}{p}\sqrt{(1+pp)} +$ funct. y & partant nous aurons $\frac{Z}{p} = \frac{\int Ydy}{p}\sqrt{(1+pp)} +$ funct. y : ou $Z = \int Ydy.\sqrt{(1+pp)} + p$ funct. y. Par consequent la courbe du fil se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les courbe celle, dans laquelle $\int Zdx$ c. à. d $\int dx\sqrt{(1+pp)}.\int Ydy + \int pdx.$ funct. y, sera un *maximum*, ou un *minimum* ; & l'expréssion, qui représente la quantité d'action sera $\int ds\int Ydy + \int dy$ funct. y. Ou puisque $\int dy$ funct. y est une fonction

ction de y, qui demeure la même pour toutes les courbes, qui passent par les mêmes points A & M, la courbure du fil AYM aura cette proprieté, que parmi toutes les courbes qui passent par les points A & M, il y aura cette expression $\int ds \int Y dy$ un minimum: d'où je tire le Theoreme suivant.

THEOREME I.

XV. *Le fil* AYM, *comme nous avons supposé dans le probleme précedent, étant dans chaque point* M *sollicité selon la direction des appliquees* MP *par des forces, qui sont exprimées par une fonction quelconque* Y *des appliquées* PM $= y$, *prendra une telle figure* AYM, *que parmi toutes les autres courbes possibles, il y aura cette expression* $\int ds \int Y dy$ *un minimum.*

On trouvera donc cette courbe, si on cherche parmi toutes les courbes, qui sont comprises entre les mêmes termes, celle où la valeur de cette expression $\int ds \int Y dy$ devient un *minimum*. Il n'est pas nécessaire, comme la nature de la question semble de demander, que cette proprieté ne regarde que les courbes de la même longueur; car il revient au même, soit qu'on suppose la formule $\int ds \int Y dy$ parmi toutes les courbes possibles, ou seulement parmi les isoperimetres: Car pour ce dernier cas, on devroit, comme j'ai demontré dans mon traité sur cette matiere, rendre cette formule $\int ds \int Y dy + \alpha \int ds$ un *minimum*. Or cette constante α pouvant être comprise dans l'integral $\int Y dy$, on pourra negliger ce terme $\alpha \int ds$, & alors il ne reste à rendre un *minimum*, que la formule trouvée $\int ds \int Y dy$.

PROBLEME II.

XVI. *Le fil parfaitement flexible* AYM *étant sollicité dans chaque point* M *suivant les directions* MP, MQ *par des forces, dont cellelà, qui agit selon* MP, *soit exprimée par une fonction de l'appliquée* MP $= y$, *& celle-cy, qui agit selon* MQ *par une fonction de l'abscisse* CP $= x$: *trouver la figure du fil* AYM.

SOLU-

SOLUTION.

Retenant toujours les mêmes denominations $CP = x$, $PM = y$, l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de y, qui exprime la force, qui agit selon MP, & X la fonction de x, qui exprime la force MQ. Nous n'avons donc que mettre dans la solution générale, que X & Y au lieu de Q & P, pour avoir l'equation suivante, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$dy(B + \int X ds) - dx(C + \int Y ds) = 0$$

ou, puisque les constantes B & C peuvent etre comprises dans les formules integrales, nous aurons:

$$dy \int X ds = dx \int Y ds.$$

Supposons $dy = p\, dx$, pour avoir $ds = dx \sqrt{(1+pp)}$, & l'équation trouvée sera $p \int X dx \sqrt{(1+pp)} = \int Y dx \sqrt{(1+pp)}$ qui etant differentiée donne

$$dp \int X dx \sqrt{(1+pp)} + Xp\, dx \sqrt{(1+pp)} = Y dx \sqrt{(1+pp)}$$

Soit de plus $dp = q\, dx$, & apres avoir differentié cette équation:

$$\int X dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{Xp \sqrt{(1+pp)}}{q} = \frac{Y \sqrt{(1+pp)}}{q}$$

nous obtiendrons mettant partout $q\, dx$ au lieu de dp

$$X dx \sqrt{(1+pp)} + X dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{Xpp\, dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{p\, dX \sqrt{(1+pp)}}{q} - \frac{Xp\, dq \sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

$$= \frac{Yp\, dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{dY \sqrt{(1+pp)}}{q} - \frac{Y dq \sqrt{(1+pp)}}{qq}$$ qui se réduit à

$$2X dx + \frac{Xpp\, dx}{1+pp} + \frac{p\, dX}{q} - \frac{Xp\, dq}{qq} = \frac{Yp\, dx}{1+pp} + \frac{dY}{q} - \frac{Y dq}{qq}$$

Multiplions cette equation par $1+pp$ pour avoir

$$\frac{(dY - p\, dX)}{q}(1+pp) - \frac{dq}{qq}(Y - pX)(1+pp) + Yp\, dx - 2X dx(1+pp) - Xpp\, dx = 0$$

& pour en trouver l'integrale, s'il y en a, je suppose;

$$\frac{(Y - pX)(1+pp)}{q} = Z$$ ce qui étant differentié donne

$$\frac{(dY - p\, dX)(1+pp)}{q} - \frac{dq}{qq}(Y - pX)(1+pp) + 2p\, dx(Y - pX) - X dx(1+pp) = dZ$$

ayant mis partout $dp = q\,dx$, Retranchons de cette équation la precedente, & il nous restera :
$dZ = Yp\,dx - 2Xpp\,dx + X\,dx(1+pp) + Xpp\,dx$
ou bien $dZ = Yp\,dx + X\,dx$. Or puisque $dy = p\,dx$, nous aurons $dZ = X\,dx + Y\,dy$, laquelle expression, parceque X est fonction de x & Y fonction de y, sera integrable & donnera

$$Z = \int X\,dx + \int Y\,dy$$

de sorte que notre equation integrale cherchée sera

$$\frac{(Y - pX)(1+pp)}{q} = \int X\,dx + \int Y\,dy$$

ou à cause de $q = \frac{dp}{dx}$ & $dy = p\,dx$:

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$$

Il ne paroit pas que cette équation se puisse encore integrer ; aussi n'est ce-pas mon dessein de construire ces courbes, ou d'en rechercher la nature : mon but n'etant ici, que de trouver les formules, qui etant supposées devenir un *maximum*, ou un *minimum*, fournissent les mêmes courbes que nous trouvons par les principes de mechanique.

XVII. Soit $\int Z\,dx$ cette formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, produise la courbe, que nous venons de trouver, ou l'equation :

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$$

& soit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, voiant, que Z doit etre une fonction des quantités x, y, & p. Et alors la courbe cherchée sera exprimée par cette équation : $o = N - \frac{dP}{dx}$, ou $o = N\,dx - dP$, équation qui doit être la même, que $\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$.
Ici je remarque, que dans l'analyse il nous manque encore une methode, par laquelle on puisse decouvrir la formule $\int Z\,dx$, sachant l'équation, à laquelle elle doit conduire : mais aprés quelques essais on trouvera,

ra, que l'on n'a qu'à mettre $Z = (\int X dx + \int Y dy) \surd (1 + pp)$. Car alors on aura $M = X \surd (1 + pp)$; $N = Y \surd (1 + pp)$

& $P = \frac{p(\int X dx + \int Y dy)}{\surd (1 + pp)}$, d'où l'on tire

$$dP = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1 + pp) \surd (1 + pp)} + \frac{X p dx + Y p dy}{\surd (1 + pp)}$$

& partant l'équation $N dx = dP$ donnera

$$Y dx \surd (1 + pp) = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1 + pp) \surd (1 + pp)} + \frac{X p dx + Y p dy}{\surd (1 + pp)}$$

qui etant multipliée par $\surd (1 + pp)$ produira :

$$Y dx + Y pp dx - X p dx - Y p dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1 + pp}$$

Or puisque $p dx = dy$, il sera $Y pp dx - Y p dy = o$; & par conséquent on aura :

$$Y dx - X dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1 + pp} \text{ ou } \frac{dp}{1 + pp} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée pour la courbure du fil A*Y*M.

THEOREME II.

XVIII. *Le fil* A*Y*M *étant sollicité, comme on a supposé dans le probleme II. dans chaque point* M *par deux forces, l'une selon la direction des abscisses* MQ *qui soit égale à une fonction* X *de l'abscisse* $CP = x$; *&* *l'autre selon la direction des appliquées* MP, *qui soit égale a' une fonction* *Y* *de l'appliquée* $PM = y$; *alors ce fil prendra une telle figure* A*Y*M, *dans laquelle cette expression* $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ *sera un* minimum.

Le Theoreme precedent nous a dejà fait voir, que si le fil n'etoit sollicité que par les forces *Y*, alors cette formule $\int dx \int Y dy$ seroit un *minimum*: & par la même raison, si le fil étoit sollicité par les seules forces X, alors cette formule $\int ds \int X dx$ deviendroit un *minimum*. A' present nous voyons, que si ces deux differentes forces agissent ensemble, alors aussi la somme de ces deux formules $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ deviendra un *minimum*, ce qui sera à présent d'autant plus aisé de démontrer *a priori*. Nous avons supposé les forces X &

X 2 *Y* con-

Y contraires aux accroissemens des coordonnées x & y; car dès que le point M obeïroit à ces forces, tant l'abscisse x que l'appliquée y en deviendroit plus petite. D'où il est clair, que si ces forces avoient des directions opposées, alors la formule $-\int ds\,(\int X\,dx + \int Y\,dy)$ deviendroit un *minimum*, & partant celle-cy $+\int ds\,(\int X\,dx + \int Y\,dy)$ un *maximum:* ce qui sert à faire voir l'étroite liaison entre les *maxima* & *minima*, de sorte qu'on n'a qu'à changer le signe, pour changer le *minimum* dans un *maximum*, & réciproquement.

PROBLEME III.

XIX. *Si l'epaisseur du fil* A Y M *n'est pas la même partout, mais qu'elle varie selon une loi quelconque, & que ce fil soit sollicité en chaque point* M *suivant la direction* M Q *par une force exprimée par une fonction quelconque de l'abscisse* C P $= x$, *trouver la figure que ce fil prendra.*

SOLUTION.

Soit X la fonction, à laquelle la force, qui tire l'élement Mm suivant MQ, est proportionelle; & cette force X doit etre regardée comme une force acceleratrice, qui etant multipliée par la masse de l'élément Mm, donnera la veritable force motrice. Or le fil étant supposé d'une épaisseur inégale, la masse de l'élément Mm, n'e sera plus exprimée par ds, ni par conséquent la force par X ds. Soit donc $\int S\,ds$ la masse du fil entier AYM dont la longueur $= s$, & la masse de l'élément Mm sera $= S\,ds$, où S marque une fonction quelconque de s, d'où depend l'epaisseur du fil. Donc la force qui tire cet élément Mm, suivant la direction des abscisses MQ, sera $= X\,S\,ds$, qui ètant mise pour Q ds donnera pour la figure du fil cette équation:

$$C\,dx = dy \int X\,S\,ds.$$

Posant $dy = p\,dx$ & $ds = dx\,\sqrt{(1+pp)}$ cette équation se changera en $\frac{C}{p} = \int X S\,dx \sqrt{(1+pp)}$, & par la differentiation en

$$-\frac{C\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = X\,S\,dx, \text{ ou } \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X\,S\,dx.$$

Il s'en faut encore beaucop, qu'on puisse connoitre de cette équation

la

la courbe que nous cherchons, mais cette équation suffit pour notre dessein qui est de découvrir une formule, qui étant supposée un *minimum* produise la même équation $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X S dx$.

XX. Il paroit d'abord fort probable, que pour avoir cette formule, nous n'avons qu'à écrire $S ds$, au lieu de ds, dans les formules, qui satisfont aux questions précedentes. Ainsi pour ce cas que nous venons de developper nous aurons cette formule $\int S ds \int X dx$, qui etant supposée un *minimum*, devroit produire l'equation pour la courbure du fil. Cette formule comparée à la générale $= \int Z dx$, à cause de $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ donnera $Z = S\sqrt{(1+pp)}.\int X dx$: qui etant une fonction renfermant non seulement les x, y, avec leurs differentiels, mais aussi l'arc s, il faut emploïer pour ce cas la régle qui suit.

Si Z est une fonction non seulement des variables x, y, & des quantités qui résultent de leurs differentiels, savoir $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ *&c. mais ausfi d'une formule intégrale* $\int \mathfrak{Z} dx = \Pi$, *de sorte que*

$$dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr \text{ \&c.}$$

$$\text{\& } d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} dx + \mathfrak{N} dy + \mathfrak{P} dp + \mathfrak{Q} dq + \mathfrak{R} dr \text{ \&c.}$$

Alors entre toutes les courbes, qui ont $\int \mathfrak{Z} dx$ *de la même grandeur, celle où il y aura* $\int Z dx$ *un minimum sera exprimée par cette équation.*

$$o = N - \mathfrak{N}\int L dx - \frac{1}{dx} d.(P - \mathfrak{P}\int L dx) + \frac{1}{dx^2} dd.(Q - \mathfrak{Q}\int L dx).$$

XXI. Dans le cas present S étant une fonction de $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, je ferai $\Pi = s$ & $\mathfrak{Z} = \sqrt{(1+pp)}$: & il sera $\mathfrak{M} = o$, $\mathfrak{N} = o$, & $\mathfrak{P} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; Ensuite supposant $dS = K ds$, nous aurons

$dZ = K ds \sqrt{(1+pp)}. \int X dx + XS dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{S p\, dp}{\sqrt{(1+pp)}} \int X dx$
& partant $L = K \sqrt{(1+pp)} \int X dx$; $M = XS \sqrt{(1+pp)}$; $N = o$
& $P = \frac{S p \int X dx}{\sqrt{(1+pp)}}$. De là l'equation cherchée ſera :

$$o = -\frac{1}{dx} d. \left(\frac{S p \int X dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int K dx \sqrt{(1+pp)}. \int X dx \right)$$

Or puisque $K dx \sqrt{(1+pp)} = K ds$, nous aurons $K dx \sqrt{(1+pp)} = dS$ & notre équation ſera $o = -\frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (S \int X dx - \int dS \int X dx)$ & prenant intégrale ;

$$C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (S \int X dx - \int dS \int X dx).$$

Mais le differentiel de $S \int X dx - \int dS \int X dx$ étant $= XS dx$, nous aurons $C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int XS dx$, ou bien $\frac{C \sqrt{(1+pp)}}{p} = \int XS dx$, qui eſt la même équation, que la ſolution du probleme nous a fournie, & par conſequent cette ſolution ſe trouve, ſi l'on cherche entre toutes les courbes iſoperimetres, ou entre toutes les courbes, que le fil propoſé pourroit former, celle, où il y aura cette formule $\int S ds \int X dx$ *un minimum* : & de là nous tirerons ce theoreme encore plus général.

THEOREME III.

XXII. *Le fil parfaitement flexible* AYM, *dont la longueur* $= s$, *& la maſſe* $= \int S ds$, *étant ſollicité en chaque point* M *par deux forces acceleratrices, ſuivant les directions* MQ, MP, *dont celle-là ſoit égale à une fonction* X *de l'abſciſſe* CP $= x$, *à laquelle la direction* MQ *eſt parallele ; or celle-ci, qui agit dans la direction de l'appliquée* MP $= y$, *ſoit égale à une fonction* Y *de* y, *de ſorte que l'élément du fil* Mm $= ds$, *dont la maſſe* $= S ds$, *ſoit ſollicité par la force motrice* XS ds *ſelon* MQ *& par la force motrice* YS ds *ſelon* MP : *la courbe,* AYM, *que le fil formera, aura cette proprieté, que parmi toutes les autres*

autres courbes de la même longueur, il y aura cette formule $\int S\,ds\,(\int X\,dx + \int Y\,dy)$ *UN MINIMUM.*

Il n'eſt pas neceſſaire de démontrer ce theoreme dans toute ſon étendue, car l'ayant démontré pour le cas, où l'elément Mm n'eſt ſollicité que par une force $XS\,ds$, dans la direction MQ, la même démonſtration ſervira auſſi pour l'autre force $YS\,ds$, ſi elle agiſſoit toute ſeule, deſorte que pour le premier cas on aura la formule $\int S\,ds \int X\,dx$, & pour l'autre celle-cy $\int S\,ds \int Y\,dy$, qui doit être un *minimum*. Or la ſolution du probleme ſecond nous convaincra, que ſi les deux forces agiſſent enſemble, on n'aura qu'à ajouter enſemble les deux formules, qui appartiennent ſeparément à ces deux cas: cependant on pourra s'aſſeurer tout à fait de cette verité, ſi l'on veut faire le calcul ſuivant les régles, dont nous nous ſommes ſervi dans la ſolution du probleme II.

XXIII. Pour approfondir la nature de ces formules, il faut avoir egard à trois choſes: I*mo.* à la quantité des forces acceleratrices, dont chaque élément du fil eſt ſollicité, II*do.* à la direction de ces forces & III*tio.* à l'epaiſſeur, ou à la maſſe du fil. La quantité de la force acceleratrice ſe trouve, ſi l'on diviſe la force motrice dont chaque élément du fil eſt ſollicité, par la maſſe de ce même élément: la force acceleratrice ſera donc une quantité finie exprimée par une fonction. Jusqu'ici nous avons ſuppoſé des fonctions, ou de l'abſciſſe x, ou de l'appliquée y, pour exprimer ces forces acceleratrices. Pour la direction de ces forces, nous l'avons ſuppoſée parallele à celle des coordonnées x ou y, dont la force même étoit une fonction: Ainſi la force exprimée par X, fonction de l'abſciſſe $CP = x$, agiſſoit dans la direction MQ parallele aux abſciſſes, & la force Y, fonction de l'appliquée $PM = y$, agiſſoit dans cette même direction MP. Dans ces cas pour trouver les formules, qui contiennent un *minimum*, ou ce qui revient au même, pour repréſenter la quantité d'action, il faut multiplier chaque force X & Y par l'elément de ſa direction dx & dy, pour avoir $X\,dx$ & $Y\,dy$, & d'en prendre les intégrales $\int X\,dx$ & $\int Y\,dy$. A' ces formules on donnera le ſigne + ſi les forces X & Y ſont contraires aux directions des quantités x & y, ou que leur action tend à diminuer ces quantités, comme la figure repréſente: or ſi une de ces

ces forces avoit une direction contraire, on donnera le ſigne — à la formule intégrale $\int X\,dx$ ou $\int Y\,dy$. Suivant cette régle par rapport aux ſignes, on ajoutera enſemble ces intégrales, s'il y en a pluſieurs, & on multipliera la ſomme par la maſſe de l'elément du fil $S\,ds$. Alors l'intégrale de ce produit $\int S\,ds\,(\pm\int X\,dx \pm \int Y\,dy)$; ſera la formule cherchée, dont la valeur eſt *un minimum* pour la courbe du fil.

XXIV. Cette régle, que nous venons de découvrir, demande, que la variable, dont la force eſt une fonction, & la force, ayent la même direction; & on ſe tromperoit, ſi l'on vouloit appliquer cette régle à des cas, ou cette identité de directions n'a pas lieu. Pour la preuve de cela, ſuppoſons que le fil AYM ſoit ſollicité au point M ſuivant la direction de l'appliquée MP par une force, qui ſoit égale à une fonction de l'abſciſſe $CP = x$. Soit cette force $= X$, & ſuppoſant le fil par tout également epais, nous aurons pour ſa courbure cette équation $B\,dy = dx \int X\,ds$, qui poſant $dy = p\,dx$ ſe change en $Bp = \int X\,dx\,\surd(1+pp)$, ou $\frac{B\,dp}{\surd(1+pp)} = X\,dx$, d'où l'on tire $\int X\,dx = B\int\frac{dp}{\surd(1+pp)}$.

Or on verra bientot, que cette courbe ne ſe trouve pas en faiſant la formule $\int ds \int X\,dy$ un *minimum*, où la force acceleratrice X eſt multipliée par dy, le differentiel de la ligne MP, qui repréſente la direction de cette force, & l'integral $\int X\,d$ eſt y multiplié par l'élément du fil ds. Mais la courbe qu'on tire de cette formule $\int ds \int X\,dy$ ſuivant la methode de *maximis* & *minimis* ſera bien differente de celle, que nous venons de trouver ſavoir

$$\int X\,dx = B\int\frac{dp}{\surd(1+pp)} = B\,l\,(p + \surd(1+pp))$$

XXV. Voyons donc quelle ſera pour ce cas la formule, qui étant ſuppoſée un *maximum*, ou *minimum*, conduiſe à cette même équation. Soit $\int Z\,dx$ cette formule, & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; d'où on obtient en général cette équation $o = N - \frac{dP}{dx}$

Or

Or puisque notre équation $\int X\,dx = B\int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ ne contient pas y, on voit que $N = o$, & que l'équation pour la courbe sera $dP = o$, ou $P = B$. Soit pour abrêger $\Pi = \int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, de sorte que Π est une fonction connue de p, & notre équation $\int X\,dx = B\,\Pi$, comparée à $P = B$, donnera $P = \frac{\int X\,dx}{\Pi}$, & partant $dZ = M\,dx + \frac{dp\int X\,dx}{\Pi}$; soit l'integral $\int \frac{dp}{\Pi} = \Phi$, & nous aurons $Z = \Phi \int X\,dx$, & la formule dont la valeur est un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe du fil sera $\int \Phi\,dx \int X\,dx$, où Φ marque une fonction de p, qui renferme une double intégration savoir $\Phi = \int \frac{dp}{\int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}} = \int \frac{dp}{l(\sqrt{(1+pp)} \pm p)}$; formule si embarassée qu'il semble presque impossible, qu'aucune theorie y sauroit jamais conduire à *priori*.

XXVI. Nous voyons donc, qu'il n'est pas permis de donner à la régle, que nous avons tirée des trois theoremes precedens, une plus grande étendue, que pour les cas où, tant la quantité, que la direction des forces acceleratrices sont determinées par la même quantité variable, & quoique jusqu'ici nous ayons supposé ces variables paralleles entr'elles, pourtant la régle mentionnée aura aussi lieu, si les variables, dont les forces sont des fonctions, sortent d'un point fixe, pourvû que les forces agissent dans la direction de ces mêmes variables. La même régle ne souffrira non plus aucune exception, quand même le fil seroit sollicité en même tems vers plusieurs points fixes, par des forces acceleratrices, qui fussent proportionelles à des fonctions quelconques des distances à ces points. Comme cette circonstance contribuëra considérablement à la perfection de la theorie, que nous avons en vuë, je joindrai les problemes suivans, où je considérerai des forces dirigées vers un, ou plusieurs points fixes, pour en tirer les theo-

theoremes, qui contiennent les formules, dont la quantité d'action peut être représentée.

PROBLEME IV.

Fig. 2. XXVII. *Le fil* A M *étant dans tous ses points* M *sollicité vers le point fixe* C *par une force, qui soit exprimée par une fonction quelconque de la distance* M C: *trouver la courbe* C M, *à laquelle le fil sera réduit.*

SOLUTION.

Que l'axe C P auquel nous rapporterons la courbe, passe par le point C, & y ayant tiré la perpendiculaire M P, soit C P $= x$, P M $= y$, & il sera C M $= \surd(xx + yy)$. Or soit C M $= \surd(xx + yy) = v$ & V la fonction de v, qui exprime la force acceleratrice, dont l'élément M m est tiré vers C. Décomposons cette force selon les directions M P, M Q paralleles aux coordonnées, & nous aurons la force selon M Q $= \frac{V\ x}{v}$ & la force selon M P $= \frac{V\ y}{v}$. Donc dans la solution du probléme général nous n'avons qu'à mettre $\frac{V\ x}{v}$ au lieu de Q & $\frac{V\ y}{v}$ au lieu de P, & l'equation pour la courbe cherchée A M sera

$$dy \int \frac{V\,x\,ds}{v} - dx \int \frac{V\,y\,ds}{v} = o$$

où ds marque la masse de l'élément du fil Mm, que je supposerai ici de la même épaisseur par tout, desorte que $ds = \surd(dx^2 + dy^2)$. Mettons comme auparavant $dy = p\,dx$, pour avoir $p \int \frac{V\,x\,dx\,\surd(1+pp)}{v} = \int \frac{V\,y\,dx\,\surd(1+pp)}{v}$ dont le differentiel est:

$$dp \int \frac{V x dx \surd(1+pp)}{v} + \frac{V x p dx \surd(1+pp)}{v} = \frac{V y dx \surd(1+pp)}{v}$$

Soit

Soit de plus $dp = q\,dx$, & pour $\frac{V}{v}$ écrivons U, pour avoir:

$$\int U\,x\,dx\,\sqrt{(1+pp)} = \frac{U(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q}$$

dont le differentiel est:

$$U\,x\,dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - U\,x\,dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

qui se change en celle-cy

$$\frac{2\,x\,q\,dx}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{p\,q\,dx}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

ou bien à cause de $q\,dx = dp$ en celle-cy

$$\frac{2\,x\,dp}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{p\,dp}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

dont chaque membre est un differentiel logarithmique; car $d(y-px) = -x\,dp$, & partant $\frac{2\,x\,dp}{y-px} = \frac{-2d(y-px)}{y-px}$

Par conséquent l'integrale de notre équation sera $lC - 2l(y-px) = lU + l\sqrt{(1+pp)} - lq$, & remontant aux nombres:

$$\frac{C}{(y-px)^2} = \frac{U\sqrt{(1+pp)}}{q} = \frac{U\,dx\sqrt{(1+pp)}}{dp}$$

Donc $\frac{C\,dp}{(y-px)^2\sqrt{(1+pp)}} = U\,dx$. Or puisque U est fonction de $v = \sqrt{(xx+yy)}$, & partant $v\,dv = x\,dx + y\,dy = dx\,(x+py)$ multiplions notre équation par $x+py$, pour avoir

$$\frac{C\,dp\,(x+py)}{(y-px)^2\sqrt{(1+pp)}} = U\,dx(x+py) = U\,v\,dv = V\,dv$$

à cause de $V = U\,v$; où le membre $V\,dv$ est integrable: or je remarque que l'autre membre $\frac{C\,dp\,(x+py)}{(y-px)^2\sqrt{(1+pp)}}$ est également

inte-

integrable, ayant pour integrale $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Car puisque $d(y-px)=-xdp$ à cause de $dy=pdx$, il sera

$$d.\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px}=\frac{C\,p\,dp}{(y-px)\sqrt{(1+pp)}}+\frac{Cxdp\sqrt{(1+pp)}}{(y-px)^2}=\frac{C\,dp\,(x+py)}{(y-px)^2\sqrt{(1+pp)}}$$

Par conséquent nous aurons pour l'equation de la courbe cherchée:

$$\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px}=\int V\,dv.$$

XXVIII. Il y a encore un autre chemin de trouver l'integrale de l'equation differentielle, à laquelle nous sommes parvenus:

$$0=\frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q}-2Uxdx\sqrt{(1+pp)}+\frac{U(y-px)pdx}{\sqrt{(1+pp)}}-\frac{U(y-px)dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

Nous n'avons qu'à la multiplier par $\sqrt{(1+pp)}$, pour avoir

$$0=\frac{dU(y-px)(1+pp)}{q}-2Uxdx(1+pp)+U(y-px)\,p\,dx-\frac{U(y-px)dq(1+pp)}{qq}$$

de laquelle supposons que l'integrale soit:

$C=Z+\frac{U(y-px)(1+pp)}{q}$, qui etant differentiée donne

$$0=dZ+\frac{dU(y-px)(1+pp)}{q}-Uxdx(1+pp)+2U(y-px)pdx-\frac{U(y-px)dq(1+pp)}{qq}$$

qui étant comparée à notre équation donnera:

$dZ=-Uxdx(1+pp)-U(y-px)pdx=-Udx(x+py)$

Il y aura donc $dZ=-U(x\,dx+y\,dy)=-U\,v\,dv$

& parceque $Uv=V$, qui est fonction de v nous aurons $dZ=-V\,dv$ & $Z=-\int V\,dv$. Par conséquent notre équation integrée pour la premiere fois sera

$$C=-\int V\,dv+\frac{U(y-px)(1+pp)}{q}$$

ou bien $\frac{U}{\int V\,dv}=\frac{q}{(y-px)(1+pp)}$.

Multiplions de part & d'autre par $v\,dv=dx(x+py)$ & nous aurons

$U\,v\,dv$

$$\frac{U v d v}{\int V d v} = \frac{q d x (x + p y)}{(y - p x)(1 + p p)}$$

Or puisque $U v = V$ & $q d x = d p$,

$$\frac{V d v}{\int V d v} = \frac{d p (x + p y)}{(y - p x)(1 + p p)} = \frac{x d p}{y - p x} + \frac{p d p}{1 + p p}$$

dont chaque membre est un differentiel logarithmique à cause de $x d p = - d (y - p x)$, & delà nous tirerons cette équation intégrale

$$l \int V d v = - l (y - p x) + l \sqrt{(1 + p p)} + l C$$

d'où remontant aux nombres nous obtiendrons

$$\int V d v = \frac{C \sqrt{(1 + p p)}}{y - p x}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée par la premiere methode, aprés avoir fait deux integrations. Mais qu'on remarque en particulier l'équation qui s'est trouvée ici par la premiere integration

$$\int V d v = \frac{U (y - p x)(1 + p p)}{q} \text{ ou } \frac{q \int V d v}{1 + p p} = \frac{V (y - p x)}{v}$$

à laquelle conduira la methode de *maximis* & *minimis*.

THEOREME IV.

XXIX. *Le fil* A M *étant dans tous ses points* M *sollicité vers le point fixe* C *par une force acceleratrice* V, *qui soit une fonction quelconque de la distance* $CM = v$, *la courbure du fil se trouvera, si l'on cherche entre toutes les courbes possibles, celle où la valeur de cette expression* $\int d s \int V d v$ *est un* minimum, (*ds marquant la masse de l'élément du fil* M *m*.) Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Ayant fait $d y = p d x$, $d p = q d x$, la formule proposée $\int d s \int V d v$ se change en $\int d x \sqrt{(1 + p p)} \int V d v$, supposant le fil par tout de la même grosseur, où $\int V d v$ sera une fonction de v, & partant son differentiel $= V d v = \frac{V x d x + V y d y}{v}$ à cause de $v d v = x d x + y d y$.

$+ y\,dy$. Donc si nous comparons cette formule avec les expressions générales $\int Z\,dx$ & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, nous aurons $Z = \sqrt{(1+pp)} \int V\,dv$

& $dZ = \frac{V x\,dx}{v} \sqrt{(1+pp)} + \frac{V y\,dy}{v} \sqrt{(1+pp)} + \frac{p\,dp \int V\,dv}{\sqrt{(1+pp)}}$

& partant $M = \frac{V x}{v} \sqrt{(1+pp)}$; $N = \frac{V y}{v} \sqrt{(1+pp)}$ & $P = \frac{p \int V\,dv}{\sqrt{(1+pp)}}$

Or la courbe, où $\int Z\,dx$ est un *minimum*, étant exprimée par cette équation $o = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N\,dx = dP$, nous aurons pour notre cas:

$$\frac{V y\,dx \sqrt{(1+pp)}}{v} = \frac{V p\,dv}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{dp \int V\,dv}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}$$

& multipliant par $\sqrt{(1+pp)}$

$$\frac{V y\,dx(1+pp) - V p v\,dv}{v} = \frac{dp \int V\,dv}{1+pp} = \frac{q\,dx \int V\,dv}{1+pp}$$

équation, qui à cause de $v\,dv = x\,dx + y\,dy = dx\,(x + py)$ se réduit à celle-cy

$$\frac{V\,dx(y - px)}{v} = \frac{q\,dx \int V\,dv}{1+pp} \text{ ou } \frac{V(y - px)}{v} = \frac{q \int V\,dv}{1+pp}$$

ce-qui est la même équation, que la solution du probleme précedent nous a fournie.

PROBLEME V.

Fig. 3. XXX. *Le fil parfaitement flexible* AM *étant dans tous ses points* M *sollicité en même tems vers plusieurs points fixes* C, C′, C″ *&c. par des forces acceleratrices, qui soient exprimées par des fonctions quelconques des distances* MC, MC′, MC″, *&c. trouver la courbe, à laquelle ce fil sera réduit.*

SOLUTION.

Ayant choisi deux directions fixes MQ, MP & perpendiculaires entr'elles, suivant lesquelles nous décomposerons chaque force, soient

soient les coordonnées pour chaque point avec les distances du point M à ces points C, C′, C″ &c. nommées comme il suit :

$C\,P = x$; $P\,M = y$; $C\,M = v$, la force $MC = V$
$C'\,P' = x'$; $P'\,M = y'$; $C'\,M = v'$, la force $MC' = V'$
$C''P'' = x''$; $P''M = y''$; $C''M = v''$, la force $MC'' = V''$

& on aura :

$$vv = xx + yy;\ v'v' = x'x' + y'y';\ v''v'' = x''x'' + y''y''$$

Or puisque les abscisses x, x', x'' &c. & les appliquées y, y', y'' &c. ne different entr'elles que de quantites constantes, leurs differentiels seront égaux, ou il sera $dx = dx' = dx''$ &c. & $dy = dy' = dy'' =$ &c.

Donc posant $dy = p\,dx$, & $dp = q\,dx$, les quantités p, q, seront les mêmes pour tous les differens points C, C′, C″ &c. & l'élement du fil Mm sera $= dx \surd(1 + pp)$.

Decomposons maintenant chaque force V, V′, V″ &c. selon les directions MQ & MP, &

	pour la direction MQ	pour la direction MB
la force V donnera	la force $= \frac{V\,x}{v}$	la force $= \frac{V\,y}{v}$
la force V′ - -	la force $= \frac{V'\,x'}{v'}$	la force $= \frac{V'\,y'}{v'}$
la force V″ - -	la force $= \frac{V''\,x''}{v''}$	la force $= \frac{V''\,y''}{v''}$

Soit pour abreger $\frac{V}{v} = U$; $\frac{V'}{v'} = U'$, $\frac{V''}{v''} = U''$ &c.

& l'elément $Mm = ds = dx \surd(1 + pp)$ sera en tout sollicité suivant MQ par la force $= Ux + U'x' + U''x''$
suivant M P par la force $= Uy + U'y' + U''y''$

Par conséquent mettant ces expressions pour Q & P, nous aurons pour la courbe du fil A M cette équation

$$dy\textstyle\int ds\,(Ux + U'x' + U''x'') = dx\int ds\,(Uy + U'y' + U''y'')$$

qui posant $dy = p\,dx$, donnera par la differentiation :

$$dp\textstyle\int ds\,(Ux + U'x' + U''x'') + p\,ds\,(Ux + U'x' + U''x'') = ds\,(Uy + U'y' + U''y'')$$

Ou

Ou mettant $dp = q\,dx$, & pour ds sa valeur $dx\sqrt{(1+pp)}$

$$\int dx(Ux + U'x' + U''x'')\sqrt{(1+pp)} = \frac{U(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} + \frac{U'(y'-px')\sqrt{(1+pp)}}{q} + \frac{U''(y''-px'')\sqrt{(1+pp)}}{q}$$

laquelle étant differentiée, comme dans la solution du probleme précedent, donnera :

$$0 = \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2Uxdx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)pdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$
$$+ \frac{dU'(y-px')\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2U'x'dx(1+pp) + \frac{U'(y'-px')pdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U'(y'-px')\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$
$$+ \frac{dU''(y''-px'')\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2U''x''dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U''(y''-px'')pdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U''(y''-px'')\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{(1+pp)}$, & integrée comme dans le §. XXVIII. donnera :

$$C = -\int V\,dv + U(y-px)(1+pp) : q$$
$$-\int V'\,dv' + U'(y'-px')(1+pp) : q$$
$$-\int V''dv'' + U''(y''-px'')(1+pp) : q$$

Ou si nous tirons des centres de forces C, C′, C″ des perpendiculaires sur la tangente de la courbe, & que nous nommions ces perpendiculaires u, u', u'' &c, nous aurons.

$$C = +\frac{Vu\,dv}{du} - \int V\,dv$$
$$+ \frac{V'u'\,dv'}{du'} - \int V'\,dv'$$
$$+ \frac{V''u''dv''}{du''} - \int V''\,dv''$$

Si nous multiplions par $\frac{q}{1+pp}$ nous obtiendrons cette équation :

$$\frac{q}{1+pp}\left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''\right) = \begin{cases} +U\,(y-px) \\ +U'\,(y'-px') \\ +U''(y''-px'') \end{cases} = \begin{cases} +V\,(y-px\,):\,v \\ +V'\,(y'-px'):\,v' \\ +V''(y''-px''):\,v'' \end{cases}$$

qui exprime la nature de la courbure du fil.

THEOREME V.

XXXI. *Le fil parfaitement flexible* AM *étant dans tous ses points* M *sollicité vers plusieurs points fixes* C, C′, C″ *&c. par des forces accelératrices* V, V′, V″ *&c. qui soient des fonctions quelconques des distances* MC $= v$, MC′ $= v'$, MC″ $= v''$ *&c. (c. à d. chacune de la distance qui lui répond), la courbe, que le fil formera aura cette proprieté, que la valeur de cette formule* $\int ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ *y sera un* minimum, *où* ds *marque la masse de l'elément du fil* Mm.

DEMONSTRATION.

Soit le fil partout de la même grosseur, desorte que ds, qui devroit marquer la masse de l'elément du fil Mm, signifie simplement sa longueur $dx\sqrt{(1+pp)}$, supposant $dy = p\,dx$. Car on reconnoitra aisément, que la demonstration sera la même, si au lieu de ds on mettoit dans la formule Sds, où S marqueroit une fonction quelconque de s. Cela remarqué, si nous y appliquons les formules générales $\int Z dx$ & $dZ = M dx + N dy + P dp$, nous aurons :

$$Z = \left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''\right)\sqrt{(1+pp)}$$

& puisque :

$$dv = \frac{x dx + y dy}{v};\quad dv' = \frac{x' dx + y' dy}{v'};\quad dv'' = \frac{x'' dx + y'' dy}{v''}$$

nous aurons les valeurs suivantes :

$$M = \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}\right)\sqrt{(1+pp)}$$

$$N = \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}\right)\sqrt{(1+pp)}$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$$

Or ces valeurs etant trouvées, nous ſavons que la courbe, où $\int Z\,dx$ eſt un *minimum*, ſera exprimée par cette équation : $N\,dx = dP$: qui ſera :

$$\left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'v'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}\right)dx\sqrt{(1+pp)} =$$

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(Vdv + V'dv' + V''dv'') + \frac{dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$$

& multipliant par $\sqrt{(1+pp)}$, nous obtiendrons en faiſant $dp = q\,dx$; & en remettant pour dv, dv', dv'' leurs valeurs ; cette équation :

$$\frac{V(y-px)}{v} + \frac{V'(y'-px')}{v'} + \frac{V''(y''-px'')}{v''} =$$

$$\frac{1+pp}{q}(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$$

laquelle étant la même, que la ſolution du problême précedent nous a fournie, la verité du theoreme eſt manifeſte. Si l'on vouloit entreprendre le calcul, on s'aſſeureroit par une opération ſemblable, de la verité du theoreme pour les cas où l'épaiſſeur du fil feroit ſuppoſée variable. Car alors on n'aura qu'à mettre $S\,ds$ pour ds, & pour S prendre une fonction quelconque de s, tout comme nous avons fait dans la ſolution du Probl. III.

XXXII. Nous voilà donc tout à fait éclaircis ſur la maniere de déterminer la quantité d'action, lorsque les forces agiſſent, ou en des directions données, ou lorsqu'elles ſont dirigées vers des points fixes, pourvuque que la quantité de chaque force ſoit exprimée par une fonction de la diſtance à ſon point fixe. Car le cas où les directions d'une force ſont paralleles entr'elles, eſt compris dans l'autre, où la force eſt dirigée vers un point fixe, quand ce point s'eloigne à l'in-

à l'infini. Or quoique dans ce cas, où la diſtance au point fixe devient infinie, il ſemble que la force ne puiſſe pas être exprimée par une fonction de cette diſtance, la régle donnée y trouve pourtant lieu, & ne demande aucune exception. Car ſoit z la diſtance infinie du lieu, où la force agit, au point fixe qu'on ſuppoſe eloigné à l'infini; on en pourra retrancher une ligne conſtante a pareillement infinie, deſorte que $z - a$ devienne une ligne finie; & alors la quantité de la force doit être exprimée par une fonction de cette ligne finie $z - a$, pourqu'on puiſſe appliquer la régle trouvée: car il eſt clair, que la force étant une fonction de $z - a$, pourra être regardée comme une fonction de la diſtance même z, bien qu'elle ſoit infinie. Or dans ce cas $z - a$ marquera la diſtance du lieu, où la force agit, à une ligne droite, qui eſt perpendiculaire aux directions de la force, qui feront paralleles entr'elles. C'eſt donc la raiſon, pourquoi notre régle a pu être appliquée avec ſucces dans les cas, où la force, qui agiſſoit ſelon la direction de l'abſciſſe ou de l'appliquée, a été exprimée par une fonction de l'abſciſſe, ou de l'appliquée.

XXXIII. Cela remarqué, nous pourrons établir, que la régle, que nous venons de découvrir pour déterminer la *quantité d'action*, aura lieu toutes les fois, que les forces, dont le fil eſt ſollicité, ſeront dirigées vers des points fixes, & que la quantité de chaque force ſera exprimée par une fonction quelconque de la diſtance à ce point fixe, auquel cette force eſt dirigée. Or dans les cas où cette condition a lieu, quelque grand que ſoit le nombre des forces, qui agiſſent ſur le fil parfaitement flexible, on trouvera la figure du fil, en cherchant celle, où la quantité d'action devient *un minimum.* Pour cet effet, il faut conſiderer chaque force ſeparement: Soit dS l'element de la maſſe du fil, ſur lequel les forces agiſſent, & V une de ces forces acceleratrices dirigée vers un point fixe, dont la diſtance à l'element du fil ſoit $= v$, deſorte que V ſoit une fonction quelconque de cette diſtance v; & alors qu'on prenne l'intégral $\int V\,dv$, auquel on donnera le ſigne $+$, ſi l'action de la force tend à diminuer la diſtance v, mais s'il arrive le contraire, le ſigne $-$. Ayant tiré ſelon cette régle pour chaque force la formule $\int V\,dv$, on recueillira toutes

tes ces formules avec leurs fignes dans une fomme, que je nommerai $= W$; & alors la quantité d'action fera exprimée par cette formule $\int W\, dS$, qui étant fuppofée un *minimum*, donnera la figure du fil. En examinant cette expreffion de la quantité d'action, on la trouvera parfaitement d'accord avec celle que Monfieur de *Maupertuis* a publiée dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris pour l'An. 1740. & qu'il a tirée de principes, qui tiennent plutot à la Metaphyfique qu'à la Mecanique.

XXXIV. Quoique je n'aye appliqué cette régle, qu'aux fils parfaitement flexibles, on reconnoîtra aifément que cette maniere de déterminer la quantité d'action doit être beaucoup plus générale, & qu'elle aura lieu dans tous les autres objets, fur lesquels les mêmes forces peuvent agir: car en effet, le cas, auquel Mr. de *Maupertuis* a appliqué cette régle eft bien different de celui cy, que j'ai confideré dans les problemes précedens. Il n'y a donc aucun doute qu'on ne doive exprimer de la même maniere la quantité d'action des forces femblables, qui agiffent fur un fil roide, ou élaftique: or dans ce cas, comme la courbure d'un tel fil ne dépend pas uniquement de ces forces, qui agiffent fur chacun de fes élémens, mais outre cela auffi de fa roideur, ou de fon élafticité; il faut ajouter à la quantité d'action qui refulte des forces, encore la quantité d'action qui convient à la roideur, ou élafticité même du fil, pour obtenir l'expreffion totale, qui fera un *minimum*. Mais il ne paroit pas fi facile de déterminer fuivant la même régle, que je viens de donner pour les forces, la quantité d'action, qui convient à l'élafticité; puisque l'action de l'élafticité femble tout à fait differente de celle des forces, que j'ai confiderées jusqu'ici, tant par rapport à la direction qu'à la quantité de l'élafticité. Je tacherai donc de découvrir *à pofteriori* cette quantité d'action de l'élafticité, en cherchant l'expreffion, qui étant fuppofée un *minimum*, fourniffe la même courbe, que les principes de la Mecanique donnent pour un fil élaftique follicité par des forces quelconques.

Fig. 1. XXXV. Si le fil élaftique AYM n'eft follicité qu'au bout A par deux forces conftantes $AB = A$ & $AC = C$, la courbe à laquelle

quelle il sera réduit, sera exprimée par cette équation $\frac{S}{r} = By - Cx$, où r marque le rayon de la courbure au point M, & S signifie l'épaisseur du fil au point M ou l'élasticité absolue. De sorte que si le fil est partout également élastique, cette quantité S deviendra constante; soit donc $S = A$, & l'équation $\frac{A}{r} = By - Cx$ exprimera la nature de la courbe élastique ordinaire. Dans ce cas Mr. *Daniel Bernoulli* a remarqué que cette courbe se trouve, si l'on rend cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ un *minimum*, où ds marque l'elément de la courbe Mm. De là il faut donc conclurre que la quantité d'action de l'élasticité est proportionnelle à la formule $\int \frac{ds}{rr}$; mais il n'est pas encore clair, si elle se peut combiner avec les formules, qui représentent les quantités d'action des forces sollicitantes, ou en cas que cela soit permis, par quelle constante on doit multiplier cette formule $\int \frac{ds}{rr}$, pour qu'elle puisse être mise en parallele avec les quantités d'action des forces, qui agiront sur le même fil. Pour nous asseurer sur cet article, je m'en vais chercher par les principes de Mecanique la courbure d'un fil élastique, qui est en chaque point M sollicité selon la direction MQ parallele aux abscisses $CP = x$, par des forces X qui soient des fonctions quelconques des abscisses. Et ensuite je tacherai de découvrir la formule, dont la valeur soit la plus petite dans la courbe du fil que j'aurai trouvée.

PROBLEME VI.

XXXVI. *Le fil élastique* AYM, *dont l'epaisseur aussi bien que l'élasticité soit partout la même, étant dans tous ses points* M *sollicité suivant la direction* MQ *parallele aux abscisses* CP, *par des forces acce-* Fig. 3.

 cele-

celeratrices qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces mêmes abscisses : trouver la courbe AYM, *que ce fil prendra.*

SOLUTION.

Soit l'abscisse CP $= x$, l'appliquée PM $= y$, l'elément du fil Mm $= ds$, la force acceleratrice MQ $=$ X, & partant la force motrice $= Xds$, puisque ds marquera en même tems la masse de l'element du fil Mm. Soit ensuite le rayon de la courbure en M $= r$, qui supposant $dy = pdx$; $dp = qdx$, sera exprimé en sorte $r = \frac{(1 + pp)\sqrt{(1 + pp)}}{q}$; & $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$. Pour l'effet de l'élasticité, nous avons vu cy-dessus, que son *moment* pour tourner le fil autour du point M, est $= \frac{A}{r}$, A marquant une quantité constante proportionelle à la quantité absolue de l'elasticité. Cela posé, puisque dans l'équation générale donnée §. IX. il y aura S $=$ A, Q $=$ X, & P $= o$, par consequent $\int Pds$ constant $=$ C, nous aurons pour la courbe du fil AYM cette équation $\frac{A}{r} = \int dy \int Xds - Cx$: & prenant les differentiels: $Ad.\frac{1}{r} = dy\int Xds - Cdx$ ou $\frac{A}{p}\, d.\frac{1}{r} = dx\int Xds - \frac{Cdx}{p}$. Prenons encore les differentiels en supposant dx constant, & nous aurons $Ad\left(\frac{1}{p}\, d.\frac{1}{r}\right) = Xdx^2\sqrt{(1 + pp)} + \frac{Cdxdp}{pp}$ puisque $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$ d'où nous ; obtiendrons :

$$\frac{A}{\sqrt{(1 + pp)}}\, d.\left(\frac{1}{p}\, d.\frac{1}{r}\right) = Xdx^2 + \frac{Cdxdp}{pp\sqrt{(1 + pp)}}$$

Pour integrer cette équation supposons $\frac{1}{p}\, d.\frac{1}{r} = Rdx$ & à

cause

cause de $d\left(\frac{1}{p}\, d.\, \frac{1}{r}\right) = d\mathrm{R}\, dx$ nous aurons

$$\frac{\mathrm{A}\, d\mathrm{R}}{\sqrt{(1+pp)}} = \mathrm{X}\, dx + \frac{\mathrm{C}\, dp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$$

dont l'intégral sera :

$$\frac{\mathrm{A R}}{\sqrt{(1+pp)}} + \mathrm{A}\int \frac{\mathrm{R}\, p\, dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} = \int \mathrm{X}\, dx - \frac{\mathrm{C}\sqrt{(1+pp)}}{p}$$

Or puisque $dp = q\, dx$ & $\mathrm{R}\, dx = \frac{1}{p}\, d.\, \frac{1}{r}$ il sera

$$\int \frac{\mathrm{R}\, p\, dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{q}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}\, d.\frac{1}{r} = \int \frac{1}{r}\, d.\, \frac{1}{r} = \frac{1}{2rr}$$

parce que $\frac{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{q} = r$. Par conséquent nous aurons :

$$\frac{\mathrm{A}\, d\, (1:r)}{p\, dx\, \sqrt{(1+pp)}} + \frac{\mathrm{A}}{2rr} = \int \mathrm{X}\, dx - \frac{\mathrm{C}\sqrt{(1+pp)}}{p}$$

Mais il y aura $\frac{\mathrm{A}}{2rr} = \frac{\mathrm{A}\, qq}{2(1+pp)^3}$ & $d\frac{1}{r} =$

$$\frac{d.p}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3qp\, dp}{(1+pp)^2\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dq}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{3pqq\, dx}{(1+pp)^2\sqrt{(1+pp)}}$$

de sorte que notre équation integrée sera :

$$\frac{\mathrm{A}\, dq}{p(1+pp)^2 dx} - \frac{3\mathrm{A}qq}{(1+pp)^3} + \frac{\mathrm{A}\, qq}{2(1+pp)^3} = \int \mathrm{X}\, dx - \frac{\mathrm{C}\sqrt{(1+pp)}}{p}$$

ou bien $\int \mathrm{X}\, dx = \frac{\mathrm{C}\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{\mathrm{A}\, dq}{p\, dx(1+pp)^2} - \frac{5\mathrm{A}\, qq}{2(1+pp)^3}$

Il n'est pas besoin, qu'on cherche à integrer cette équation encore une fois ; car elle suffit pour rechercher la formule, qui par la methode des plus grands & plus petits donne la même équation.

XXXVII. Pour

XXXVII. Pour découvrir la formule $\int Z\,dx$, qui étant ſuppoſée un *minimum* produiſe la même courbe, que nous venons de trouver, je commencerai par conſiderer ſeparément, tant les forces, dont le fil eſt ſollicité, que ſon elaſticité. Et d'abord ſi l'elaſticité du fil evanouïſſoit, la formule qui repréſente la quantité d'action, ſeroit, comme nous avons vu, $= \int ds \int X\,dx$: or ſi la force X evanouïſſoit, & que la courbe devint l'elaſtique commune, alors la formule qui repréſente la quantite d'action ſeroit $= \int \frac{ds}{rr}$. Delà on pourra conclure, que joignant les forces X & l'elaſticité enſemble, la formule, qui repréſentera la quantité d'action, aura une telle forme $\int ds \int X\,dx + E\int \frac{ds}{rr}$ où $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{E}{rr})$, de ſorte que la quantité E evanouïſſe, ſi l'elaſticité $\frac{A}{r}$ ou ſa valeur abſoluë A devient $= o$, mais nous ne ſavons pas encore, ſi la quantité E eſt égale à A ou à quelque fonction de A. Je ſerai donc la recherche de la courbe, où la valeur de cette expréſſion générale $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{E}{rr})$ devient un *minimum*. Soit pour cet effet $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, & il y aura $ds = dx\,\sqrt{(1+pp)}$, & $r = \frac{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{q}$: d'où notre formule ſera $= \int dx\,(\int X\,dx + \frac{Eqq}{(1+pp)^3})\sqrt{(1+pp)}$.

XXXVIII. Celle-cy étant comparée à la formule générale $\int Z\,dx$, donnera $Z = (1+pp)^{\frac{1}{2}}\int X\,dx + \frac{Eqq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$ d'où l'on voit que Z ſera une fonction des quantités x, p & q: & partant poſant $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$, nous aurons :

$$M = X\sqrt{(1+pp)}\,;\; N = o;\; P = \frac{p\int X\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{5Epqq}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

& $Q = \frac{2Eq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$. Or l'équation pour la courbe, où la valeur de la formule $\int Z\,dx$ est un *minimum*, sera $o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$, ou puisque $N = o$, celle-cy: $o = -dP + \frac{ddQ}{dx}$, & prenant les intégrales $D = P - \frac{dQ}{dx}$ ou $P\,dx - dQ = D\,dx$: ou bien $dQ - P\,dx + D\,dx = o$, substituons pour P & Q leurs valeurs trouvées, & puisque $dQ = \frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10E\,pq\,dp}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} = \frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10E\,pqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$ à cause de $dp = q\,dx$, nous trouverons:

$$\frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10E\,pqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} - \frac{p\,dx\int X dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{5E\,pqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} + D\,dx = o$$

d'où nous tirons:

$$\int X\,dx = \frac{D\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{2E\,dq}{p\,dx\,(1+pp)^2} - \frac{5E\,qq}{(1+pp)^3}$$

Or l'équation, que nous a fournie la solution du probleme étant

$$\int X\,dx = \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{A\,dq}{p\,dx(1+pp)^2} - \frac{5A\,qq}{2(1+pp)^3}$$

nous voyons prémierement que la constante D, que l'integration a introduite est celle, qui dans la solution du probleme a été nommée $= C$: Ensuite il est evident que $2E = A$, & partant $E = \frac{1}{2}A$, de sorte que nous connoissons à présent le coëfficient de la formule $\int \frac{ds}{rr}$ afin qu'elle puisse être ajoutée aux expressions, qui contiennent les quantités d'action résultantes des forces sollicitantes. Par conséquent pour le cas du probleme précedent la courbe, qui formera le fil elastique, se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les

courbes possibles celle, où la valeur de cette expression $\int ds \int X dx$ $+ \frac{1}{2} A \int \frac{ds}{rr}$ sera la plus petite: d'où nous tirons le theoreme suivant.

THEOREME VI.

XXXIX. *Le fil elastique* AYM, *dont l'epaisseur aussi bien que l'elasticité soit partout la même, de sorte que la force de l'elasticité au point* M, *laquelle contrebalance la somme des momens de toutes les forces, qui agissent sur le fil, soit* $= \frac{A}{r}$, *où r marque le rayon de la courbure au point* M; *le fil étant sollicité dans tous ses points* M *suivant la direction* MQ *parallele aux abscisses* $CP = x$, *par des forces acceleratrices* X, *qui soient des fonctions quelconques de l'abscisse x, la courbe, que ce fil formera, sera trouvée si l'on cherche parmi toutes les courbes possibles celle où cette expression* $\int ds\, (\int X dx + \frac{A}{2rr})$ *sera un* minimum, *où ds marque la masse de l'élément du fil* M *m*.

Fig. 3. On voit bien, si au lieu des forces X, dont les directions sont paralleles aux abscisses *x*, nous eussions supposé, que les élémens du fil M*m* fussent sollicités vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces acceleratrices V, V', V'' &c. qui soient des fonctions quelconques des distances $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$ &c. pendant que l'élasticité $\frac{A}{r}$ demeurât la même, dans ce cas plus général, dis-je la courbure du fil se trouvera en faisant un *minimum* cette formule:

$$\int ds\, (\int V dv + \int V' dv' + V'' dv'' + \&c. + \frac{A}{2rr})$$

Et même si le fil n'etoit pas de la même grosseur par tout, mais que la masse de l'élément M*m* fut $= S ds$ on n'auroit qu'à écrire $S ds$ au lieu de ds, dans cette formule; pourvû que nonobstant cette variabilité de l'épaisseur du fil, l'élasticité absolue A ne changeât point: car d'ailleurs la quantité A deviendroit variable.

XL. Delà

XL. De là il semble que la quantité d'action de l'élasticité se détermine d'une façon tout à fait differente, de celle, qui sert pour les vraies forces sollicitantes, vu qu'il n'y a pas de ressemblance entre les formules $\int V\, dv$ & $\frac{A}{2rr}$. Cependant le coëfficienr $\frac{1}{2}$ me fait conjecturer, que cette quantité $\frac{A}{2rr}$ pourroit être originairement une formule intégrale, comme $\int \frac{A}{r}\, d\,\frac{1}{r}$, forme qui approche déjà fort de celle $\int V\, dv$. De plus on voit trés clairement que $\frac{A}{r}$ répond à V, car comme V signifie la quantité de la force dont l'élément Mm est sollicité dans la direction MC, ainsi $\frac{A}{r}$ marque la quantité de la force de l'élasticité au point M. Mais il n'est pas encore clair, comme le differentiél de $\frac{1}{r}$ puisse répondre à dv: neantmoins l'analogie paroitra, dés qu'on fera ces réfléxions. Le differentiel dv pris negativement marque l'espace par lequel le point M seroit transporté, s'il obeïssoit tant soit peu à la sollicitation de la force V: voyons donc si le differentiel $d\frac{1}{r}$ pourra signifier le même effet par rapport à l'élasticité. La force de l'élasticité $\frac{A}{r}$ tend à remettre le fil selon une ligne droite, ou à en diminuer la courbure. Soit donc O le centre de la courbure de l'élément $Mm = ds$, qui de la situation droite $m\mu$ differe de l'angle $Mm\mu = MOm$; soit cet angle $MOm = d\varphi$, & puisque $MO = mO = r$, il sera $d\varphi = \frac{ds}{r}$; Or la courbure de l'élément $Mm = ds$ se mesure par l'angle $MOm = d\varphi$, & absolument sans avoir égard à la quantité de l'élément $Mm = ds$ cette mesure sera = Fig. 4.

$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{r}$. Donc pour peu que l'élaſticité produiſe un effet, cette quantité $\frac{1}{r}$ en ſera diminuée ; & partant il eſt clair, que le differentiel de cette quantité $\frac{1}{r}$ pris négativement, repréſente le chemin, que la force de l'élaſticité fait decrire à l'élément Mm, dès qu'elle produit quelque effet : d'où l'on voit clairement, que ce que le differentiel dv marque par rapport à la force V, revient au même, que le differentiel de $\frac{1}{r}$ ou $d.\frac{1}{r}$ ſignifie par rapport à la force de l'élaſticité $\frac{A}{r}$: & comme V eſt une fonction de v, de même la force de l'élaſticité $\frac{A}{r}$ eſt une fonction da la quantité $\frac{1}{r}$, dont le differentiel répréſente l'action inſtantanée. De là on pourra tirer cette régle pour trouver la quantité d'action de la force de l'élaſticité: Soit T la force de l'élaſticité, que nous avons ſuppoſée $= \frac{A}{r}$, & que T ſoit une fonction quelconque de r ou de $\frac{1}{r}$: qu'on multiplie cette force T par le differentiel de $\frac{1}{r}$ ou par dt, ſuppoſant $t = \frac{1}{r}$ pour trouver l'intégrale $\int T\, dt$, qui étant multipliée par la maſſe de l'élément Mm, qui ſoit ds ou $S\,ds$, l'intégrale du produit $\int ds \int T\, dt$ donnera la quantité d'action de la force de l'élaſticité. Où il eſt evident, que cette régle eſt préciſément la même, que celle que nous avons trouvée pour les autres forces, dont le fil puiſſe être ſollicité. Par conſéquent la régle, que Mons. *de Maupertuis* a donnée dans les Mem. de l'Acad. de Paris eſt beaucoup plus générale, qu'on pourroit penſer, puisqu'elle s'etend non ſeulement à toutes ſortes de forces, qui ſont dirigées vers des centres fixes, mais auſſi aux forces d'elaſticité ; & il n'y a aucun doute, qu'elle ne ſoit encore plus générale.

REFLE-

Fig: 1.

Fig: 2.

Fig 3

Fig. 4.